ریاضیات مهندسی

دکتر علی کریم پور
عضو هیات علمی گروه برق
دانشکده مهندسی
دانشگاه فردوسی مشهد

بخش سوم
توابع مختلط

توابع مختلط

- مقدمات
- توابع تحلیلی و مشتق پذیری
- انتگرال گیری در صفحه مختلط
- سری ها
- نظریه مانده ها و محاسبه انتگرال های حقیقی

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع تحلیلی)

تابع تحلیلی: تابع مختلط **f(z)** در نقطه z_0 تحلیلی است اگر

- تابع مختلط **f(z)** در نقطه z_0 مشتق پذیر بوده و
- تابع مختلط **f(z)** در هر نقطه یک همسایگی z_0 مشتق پذیر باشد.

در این صورت نقطه z_0 **نقطه عادی** این تابع است.

نقطه تکین: اگر تابع مختلط **f(z)** در نقطه z_0 تحلیلی نباشد ولی هر همسایگی نقطه z_0 شامل نقاطی باشد که **f(z)** در آنجا تحلیلی باشد.

در این صورت نقطه z_0 **نقطه تکین** می باشد.

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع تحلیلی)

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

قضیه: اگر **u** و **v** توابع حقیقی و تک مقداره از **x** و **y** بوده و چهار مشتق اولشان در سراسر ناحیه ای چون **R** پیوسته باشند آنگاه معادله های کوشی – ریمان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

هم شرط کافی و هم شرط لازم برای تحلیلی بودن

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

در **R** می باشد. و مشتق عبارتست از:

$$\boxed{f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}} \quad \text{یا} \quad \boxed{f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}}$$

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع تحلیلی)

مثال: تحلیلی بودن تابع داده شده را بررسی کنید.

$$f(z) = \bar{z} = x - iy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad 1 \neq -1 \qquad 0 = 0$$

تابع در هیچ نقطه ای تحلیلی نیست.

مثال: تحلیلی بودن تابع داده شده را بررسی کنید.

$$f(z) = z\bar{z} = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad 2x = 0 \qquad 2y = 0$$

تابع در **z=0** مشتق پذیر و در هیچ نقطه ای تحلیلی نیست.

مثال: تحلیلی بودن تابع زیر را بررسی کنید.

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad 2x = 2x \qquad -2y = -2y$$

تابع در تمام صفحه مختلط مشتق پذیر و تحلیلی است.

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع تحلیلی)

ویژگی۱ توابع تحلیلی: اگر هم قسمت حقیقی و هم قسمت موهومی یک تابع تحلیلی دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته ای باشند، آنگاه در معادله لاپلاس زیر صدق می کنند:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

اثبات: فرض کنید $w=u(x,y)+iv(x,y)$ تابعی تحلیلی از z باشد در این صورت، u و v باید در معادلات کوشی ریمان یعنی

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

صدق کنند. اگر از معادله اول نسبت به x و از دومی نسبت به y مشتق نسبی بگیریم و نتایج را با هم جمع کنیم، داریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع تحلیلی)

تابع همساز: تابعی که مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته داشته باشد و در معادله لاپلاس صدق کند، معمولا تابع همساز نامیده می شود.

همساز مزدوج: دو تابع همساز u وv که طوری به هم مربوط باشند که u+iv تابعی تحلیلی باشد، تابع های همساز مزدوج خوانده می شوند.

مثال : نشان دهید تابع زیر همساز است. تابع مختلط تحلیلی ای بیابید که تابع داده شده قسمت حقیقی آن باشد.

$$e^x \cos y$$

حل: فرض کنید:

$$u(x,y) = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x cosy$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

لذا همساز است.

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع تحلیلی)

مثال : نشان دهید تابع زیر همساز است. تابع مختلطی تحلیلی ای بیابید که تابع داده شده قسمت حقیقی آن باشد.

$$e^x \cos y$$

حل: فرض کنید:

$$u(x,y) = e^x \cos y$$

با استفاده از شرایط کوشی ریمان

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y \qquad \rightarrow \qquad v = e^x \sin y + g(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad e^x \cos y = e^x \cos y + g'(y) \qquad \rightarrow \qquad g(y) = c$$

$$\rightarrow \qquad f(z) = e^x \cos y + i(e^x \sin y + c)$$

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع تحلیلی)

ویژگی۲ توابع تحلیلی : اگر $w=u(x,y)+iv(x,y)$ تابعی تحلیلی از z باشد، منحنی های خانواده $u(x,y)=c$ بر منحنی های خانواده $v(x,y)=k$ متعامد هستند و به عکس.

اثبات: شیب منحنی های خانواده $u(x,y)=c$ با مشتق گیری ضمنی عبارتست از:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y} \qquad \partial u/\partial x\, dx+\partial u/\partial y\, dy=0$$

به صورت مشابه شیب منحنی های خانواده $v(x,y)=k$ عبارتست از:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial v/\partial x}{\partial v/\partial y} \xrightarrow{\text{شرایط کوشی ریمان}} \frac{dy}{dx}=\frac{\partial u/\partial y}{\partial u/\partial x}$$

مقایسه دو رابطه متعامد بودن منحنی های خانواده $v(x,y)=k$ و خانواده $u(x,y)=c$ را نشان می دهد.

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع تحلیلی)

- **ویژگی ۳ توابع تحلیلی** : اگر در تابع تحلیلی دلخواه w=u(x,y)+iv(x,y) به جای متغیر های xو y معادلهای آنها برحسب z و $\bar{z}$ یعنی

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

را قرار دهیم آنگاه w به صورت تابعی از z در می آید.

اثبات:

$$w = u(x,y) + iv(x,y) = u\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$$

حال باید:

$$\partial w / \partial \bar{z} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial(u+iv)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

تعریف تابع e^z

الف: e^z تک مقداری و تحلیلی باشد.

ب: $$\frac{de^z}{dz} = e^z$$

ج: e^z وقتی $Im(z)=0$ باشد به e^x تبدیل شود

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

هدف: پیدا کردن تابعی که خصوصیات مطلوب e^z را برآورده سازد.

$$e^z = u + iv$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = u + iv$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = u + iv$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = v \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = u \qquad -\frac{\partial u}{\partial y} = v$$

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u \longrightarrow \boxed{u = e^{x}\varphi(y)}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = v \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

طبق معادلات کوشی-ریمان

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varphi''(y) = -\varphi(y) \longrightarrow \boxed{\varphi(y) = A\cos y + B\sin y}$$

$$\boxed{u = e^{x}(A\cos y + B\sin y)}$$

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

$$u = e^x(Acosy + Bsiny)$$

$$v = -\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x(-Asiny + Bcosy)$$

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{u} + \mathrm{iv} = e^x[(\mathrm{Acosy} + \mathrm{Bsiny}) + \mathrm{i}(\mathrm{Asiny} - \mathrm{Bcosy})]$$

$$e^x = e^x(A - iB) \longrightarrow A = 1 \quad B = 0$$

$$\boxed{\mathrm{e}^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + isiny)}$$

$$\mathrm{mod}\ \mathrm{e}^z = |e^z| = e^x \qquad \arg \mathrm{e}^z = y$$

$$u(x,y) = e^x \cos y \qquad v(x,y) = e^x \sin y$$

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$e^{i\theta} = cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = cos\theta - i\sin\theta$$

$$cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$sinz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

توابع مثلثاتی:

$$cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2}$$

$$= \frac{e^{-y}e^{ix} + e^{y}e^{-ix}}{2}$$

$$= \frac{e^{-y}(cosx + isinx) + e^{y}(cosx - isinx)}{2}$$

$$= cosx\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} - isinx\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

$$cosz = cosxcoshy - isinxsinhy$$

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

تابع مثلثاتی **cosz**

$$cosz = \cos(x + iy) = cosxcoshy - isinxsinhy$$

$$u(x, y) = cosxcoshy \qquad v(x, y) = -sinxsinhy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -sinxcoshy$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -sinx\cosh y$$

$$\longrightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -cosx\sinh y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = cosxsinhy$$

$$\longrightarrow \qquad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

پس **cosz** بنا به قضیه داده شده در کل صفحه **z** تحلیلی است.

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

تابع مثلثاتی **sinz**

$$sinz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}}{2i} \quad = \frac{e^{-y}(cosx + isinx) - e^{y}(cosx - isinx)}{2i}$$

$$= sinx\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} + icosx\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

$$sinz = \sin(x + iy) = sinxcoshy + icosxsinhy$$

تمرین: نشان دهید **sinz** در کل صفحه **z** تحلیلی است.

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

توابع هایپربولیک:

$$sinhz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$coshz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

تمرین۱: برای هر یک از توابع فوق **u(x,y)** و **v(x,y)** را محاسبه کنید.

تمرین ۲: نشان دهید توابع هایپربولیک مختلط در کل صفحه **z** تحلیلی است.

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

توابع دیگر

$$tanz = \frac{sinz}{cosz} \qquad tanhz = \frac{sinhz}{coshz}$$

$$secz = \frac{1}{cosz} \qquad sechz = \frac{1}{coshz}$$

تمرین: تحلیلی بودن هر کدام از توابع فوق را بررسی کنید.

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

توابع تحلیلی در کل صفحه **z**

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + isiny)$$

$$sinz = \sin(x+iy) = sinxcoshy + icosxsinhy$$

$$cosz = \cos(x+iy) = cosxcoshy - isinxsinhy$$

$$sinhz = \sinh(x+iy) = sinhxcosy + icoshxsiny$$

$$coshz = \cos h(x+iy) = coshxcosy + isinhxsiny$$

توابع تحلیلی در .....

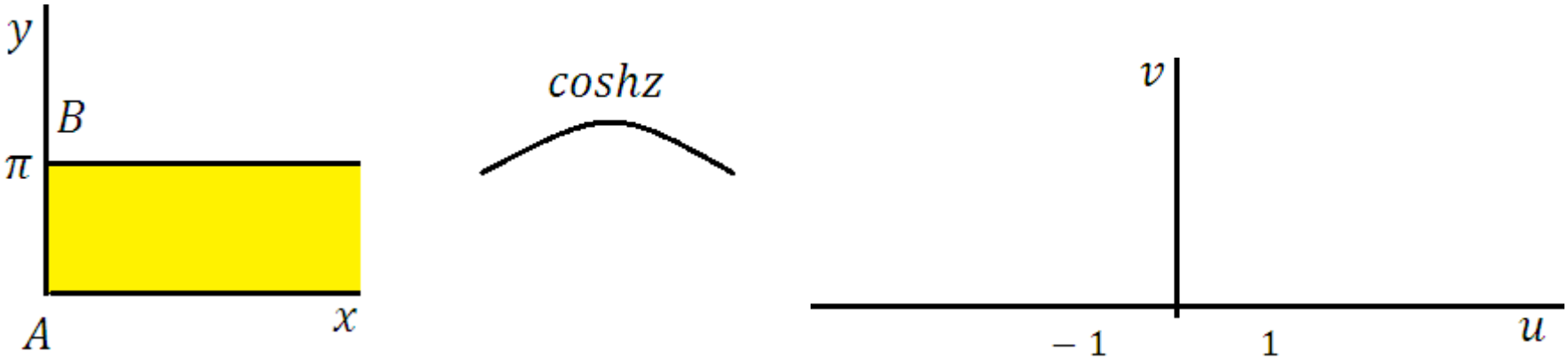
$$tanz = \frac{sinz}{cosz} \qquad tanhz = \frac{sinhz}{coshz} \qquad sechz = \frac{1}{coshz} \qquad secz = \frac{1}{cosz}$$

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

نگاشت تابع **coshz**

$$coshz = \cos h(x+iy) = coshxcosy + isinhxsiny$$

مثال: مطلوبست نگاشت بخش رنگ شده توسط تبدیل **coshz**

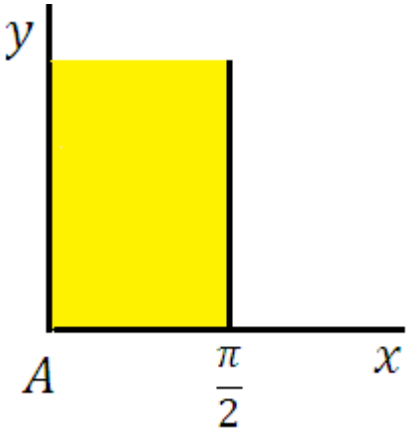


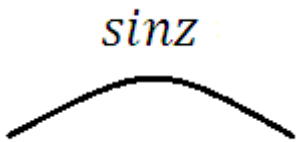
توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

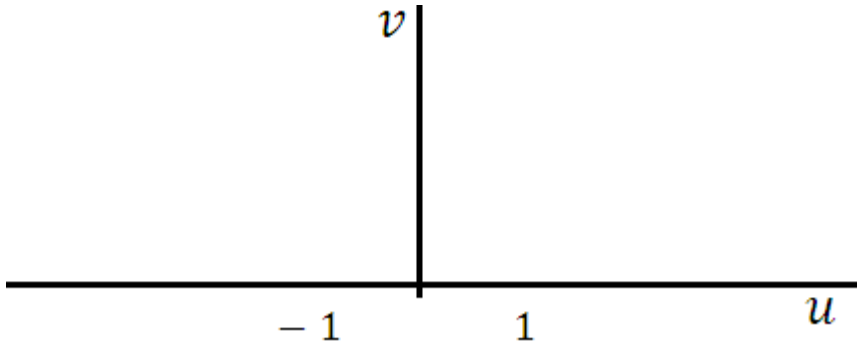
نگاشت تابع **sinz**

$$sinz = \sin(x+iy) = sinxcoshy + icosxsinhy$$

تمرین: مطلوبست نگاشت بخش رنگ شده توسط تبدیل **sinz**







توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

تابع خطی کسری یا دو خطی

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \qquad ad - bc \neq 0$$

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\frac{1}{cz+d}$$

تابع **1/z**

$$w = \frac{1}{z} \qquad z = \rho e^{i\theta} \qquad w = \rho^{-1} e^{-i\theta}$$

$$c \rightarrow cz \rightarrow cz+d \rightarrow \frac{1}{cz+d} \rightarrow \frac{bc-ad}{c}\frac{1}{cz+d}$$

$$\rightarrow \quad w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\frac{1}{cz+d}$$

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

تابع خطی کسری

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \qquad ad - bc \neq 0$$

تبدیل سه نقطه دلخواه در صفحه **Z** به سه نقطه دلخواه در صفحه **W**

$$z_1 \to w_1 \qquad z_2 \to w_2 \qquad z_3 \to w_3$$

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

مثال: تبدیلی بیابید که:

$$0 \to 1 \qquad 1 \to -1 \qquad \infty \to i$$

$$\frac{(w - 1)(-1 - i)}{(w - i)(-1 - 1)} = \frac{(z - 0)(1 - \infty)}{(z - \infty)(1 - 0)} \qquad \frac{(w - 1)(1 + i)}{2(w - i)} = z \qquad w = \frac{2iz - 1 - i}{2z - 1 - i}$$

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

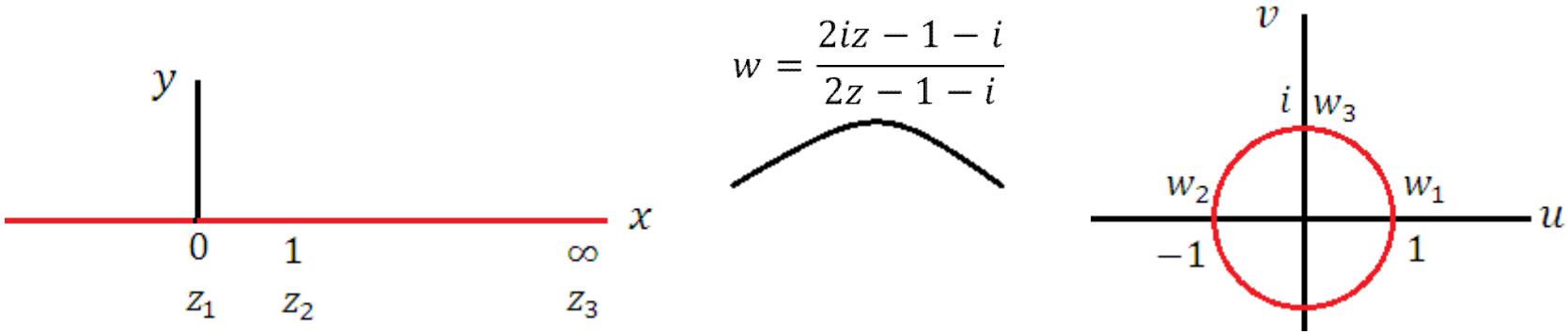
تابع خطی کسری

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \qquad ad - bc \neq 0$$

مثال: تبدیلی بیابید که:

$$0 \to 1 \qquad 1 \to -1 \qquad \infty \to i$$

$$w = \frac{2iz - 1 - i}{2z - 1 - i}$$



توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

تابع لگاریتم

$$w = lnz \qquad e^{w} = z$$

$$w = u + iv \qquad z = re^{i\theta}$$

$$e^{w} = z \qquad e^{u+iv} = e^{u}e^{iv} = re^{i\theta}$$

$$e^{u} = r \qquad v = \theta$$

$$w = u + iv = lnr + \mathrm{i}\theta = \underset{u}{ln|z|} + i\underset{v}{argz}$$

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

تابع لگاریتم

$$w = lnz = u + iv = lnr + \mathrm{i}\theta = ln|z| + iargz$$

مطلوبست لگاریتم **z**

$$z = 1 + i1$$

$$w = lnz = ln|z| + iargz = ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2n\pi)$$

پس لگاریتم **z** تابع چند مقداری است.

مقدار اصلی لگاریتم **z** برای مثال فوق عبارتست از:

$$w = lnz = ln|z| + iargz = ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$$

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

تابع لگاریتم

$$w = lnz = u + iv = lnr + \mathrm{i}\theta = ln|z| + iargz$$

لگاریتم **z** تابع چند مقداری است.

$$w = lnz = lnr + \mathrm{i}\theta = ln|z| + i(\theta + 2n\pi) \qquad -\pi < \theta \leq \pi$$

مقدار اصلی لگاریتم **z** عبارتست از:

$$w = lnz = lnr + \mathrm{i}\theta = ln|z| + i\theta \qquad -\pi < \theta \leq \pi$$

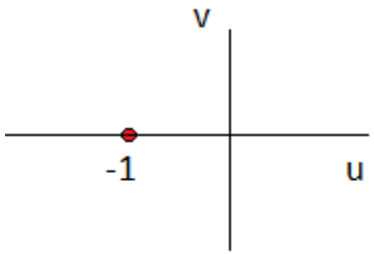
توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

تابع لگاریتم

$$w = lnz = lnr + i\theta = ln|z| + i\theta \qquad -\pi < \theta \leq \pi$$

بدیهی است که lnz در z=0 ناپیوسته است.

نقطه دلخواه روی قسمت منفی محور حقیقی در نظر بگیرید مثلا -1



$$w = \ln(-1) = lnr + i\theta = 0 + i\pi \quad or \quad 0 + i(-\pi)^{+}$$

پس lnz، در هر نقطه قسمت منفی محور حقیقی نیز ناپیوسته است.

تمرین: نشان دهید lnz، در کل صفحه z بجز مبدا و قسمت منفی محور حقیقی، تحلیلی است.

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

قضیه ۱: مقدار اصلی lnz در رابطه های زیر صدق می کند:

$$lnz_1z_2 = \begin{cases} lnz_1 + lnz_2 - 2i\pi & \pi < argz_1 + argz_2 \leq 2\pi \\ lnz_1 + lnz_2 & -\pi < argz_1 + argz_2 \leq \pi \\ lnz_1 + lnz_2 + 2i\pi & -2\pi < argz_1 + argz_2 \leq -\pi \end{cases}$$

$$ln\frac{z_1}{z_2} = \begin{cases} lnz_1 - lnz_2 - 2i\pi & \pi < argz_1 - argz_2 \leq 2\pi \\ lnz_1 - lnz_2 & -\pi < argz_1 - argz_2 \leq \pi \\ lnz_1 - lnz_2 + 2i\pi & -2\pi < argz_1 - argz_2 \leq -\pi \end{cases}$$

$$lnz^m = mlnz - 2ki\pi$$

m یک عدد صحیح است

$$\left(\frac{m}{2\pi}\right)argz - \frac{1}{2} \leq k < \left(\frac{m}{2\pi}\right)argz + \frac{1}{2}$$

که در آن k عدد صحیح یکتایی است که

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

توانهای z در حالت کلی به وسیله فرمول زیر تعریف می شوند:

$$z^a = \exp(alnz)$$

چون lnz بینهایت مقداری است، عبارت فوق نیز در حالت کلی چنین است.

$$z^a = \exp(alnz) = \exp\{a[ln|z| + i(\theta_1 + 2n\pi)]\}$$

$$= e^{aln|z|}e^{ia(\theta_1+2n\pi)}$$

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

مثال: مقدار اصلی عبارت زیر را بدست آورید

$$(1+i)^{2-i}$$

حل: بنا به تعریف

$$(1+i)^{2-i} = \exp[(2-i)\ln(1+i)] = \exp\{(2-i)\left[ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)\right]\}$$

مقدار اصلی این عبارت که با قرار دادن n=0 بدست می آید چنین است:

$$\exp\left[(2-i)\left(ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right)\right] = \exp\left[\left(2ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\left(-ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \exp\left(ln2 + \frac{\pi}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - ln\sqrt{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2} - ln\sqrt{2}\right)\right]$$

$$= e^{1.479}(cos1.224 + isin1.224) \ = 1.491 + 4.127i$$

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

توابع مثلثاتی و هیپربولیک معکوس:

$$w = \cos^{-1} z$$

$$z = cosw = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$

$$e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$$

$$iw = \ln[z \pm \sqrt{(z^2 - 1)}]$$

$$w = \cos^{-1} z = -i \ln[z \pm \sqrt{(z^2 - 1)}]$$

توابع تحلیلی و مشتق پذیری (توابع مقدماتی)

تمرین: فرمول های زیر را بدست آورید.

$$\sin^{-1} z = -i \ln[iz \pm \sqrt{(1-z^2)}]$$

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln \frac{i+z}{i-z}$$

$$\sinh^{-1} z = \ln[z \pm \sqrt{(z^2+1)}]$$

$$\cosh^{-1} z = \ln[z \pm \sqrt{(z^2-1)}]$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$$